概率统计由线性到非线性的发展

陈增敬　　　冯新伟

摘要: 概率统计是研究不确定现象的数学学科，它的本质就是从不确定现象中找确定的统计规律。三百多年以来，概率统计不仅推动了数学由确定性数学到随机数学的发展，也为经济、金融、物理、化学和生物等学科的发展提供了有效的计量工具和方法。随着大数据、人工智能和经济金融的飞速发展，现代概率统计已不能满足经济和科技发展的需要，发展和创新概率统计，为大数据、人工智能和经济金融提供理论基础和计算方法已是数学家攻克的重点热点问题。为了满足概率统计爱好者的需要，本文简单地介绍了概率统计发展的过程、对科学发展的作用、面临的问题和目前正在开展的新的研究方向，从另一个侧面介绍一下概率统计前世与后生。

1　概率统计产生的萌芽

概率统计作为数学的一个分支创立至今已有300多年的历史了，概率史界通常认为概率论起源于掷骰子。早在公元前1200年，就已经有骰子被用于赌博之类的机会性游戏中的记录，由于受到尚未完善的数学符号的影响，人们只是将掷骰子可能出现的结果罗列了出来。后来随着数学理论的发展以及经济市场对保险业的大量的需求促进了概率统计的快速发展。其中，大数学家Pascal和Fermat在1654年的通信中首先讨论了赌博中的点数问题，通过把赌博问题转化为数学问题，利用排列组合给出了正确的答案，这标志着概率论的诞生。著名物理学家Huygens1657 年的论文《论赌博中的计算》（On Reckoning at Games of Chance）被学界认为是第一篇概率论文。他在该文中研究了分配赌资问题：甲乙两个赌徒约定谁先赢满3局，谁就获得全部赌本，如果游戏的规则是完全公平的，且在甲赢得两局乙赢得一局后赌博因故中止，应如何分配赌本？Huygens不是简单的将赌本退回赌徒，而是按赢得整局赌博的比例来分赌本的思想，给出了如下公平的分配赌资的办法：

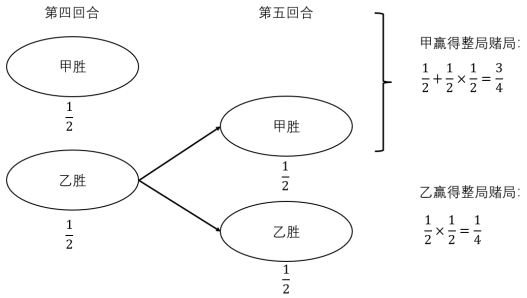


图1-赌徒分资：赌徒分得赌本的比例应该等于其获胜概率，因此解决该问题的关键是确定离获得胜利所需的局数，即需要考虑剩下两局的比赛结果。

更一般的分赌本问题如下：甲、乙两人按照某种方式下注，规定先胜t局者赢得所有赌注N，但进行到甲胜r局，乙胜s局$(r < t, s < t)$时，因故要中止赌博，则如何分才算公平？在考虑公平合理的情况下，若以$n = t - r$及$m = t - s$分别记甲及乙为达到最后胜利所需再胜的局数，又设甲在每局中取胜的概率为p，则甲失败的概率为$q = 1 - p$。假设最后甲胜，则需要甲胜n次之前，乙不能胜m次，则可以得到甲胜的概率为：

$$p_{\text{甲}} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k-1}{k} p^n q^k,$$

因此甲的“期望收益”为$N\sum_{k=0}^{m-1}\binom{n+k-1}{k}p^n q^k$。上述分配方案充分利用了概率论中数学期望的思想，这个方法也为条件概率、独立性和数学期望等概念的产生奠定了基础，为概率论提供了研究方向。

2 概率统计的兴起

随着人们对数学期望、条件概率、独立性等概念认识的不断提高，数学家首先在一种最简单的概率模型－Bernoulli模型的研究中，得到了数学上的突破。Bernoulli模型是一种最简单的随机现象，重复进行试验或者观测这种现象，每次可能出现不同的结果；但当多次重复进行该试验时，所得结果却会呈现出某种统计规律性。Bernoulli建立了概率中的第一个极限定理－Bernoulli大数定律（1713年《猜度术》），阐明了事件发生的频率会趋向于一个确定的数，也就是概率：

定理 1 （*Bernoulli*大数定律）若$\xi_1, \cdots, \xi_n$是一列独立同分布的随机变量序列，且$P(\xi_i =$

$1) = p$，$P(\xi = 0) = 1 - p$，则对任意$\varepsilon > 0$，部分和$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$满足

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| < \varepsilon\Big) = 1.$$

Bernoulli大数定律不仅揭示了概率与频率之间的关系，也诠释了不确定隐含确定的哲学思想。

Bernoulli大数定律只是说明了频率与概率之间的误差可以任意少，但是，到底误差有多少？数学家De Moivre在1733年研究了其误差，并证明了极限分布是正态分布，即我们所称的De Moivre和Laplace二项分布的中心极限定理：

定理 2 （*De Moivre-Laplace*中心极限定理）设$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数,μ_n是n次*Bernoulli*试验中事件A出现的次数,而p是事件A在每次试验中出现的概率,对$-\infty < x < \infty$有

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\Big) = \Phi(x).$$

De Moivre-Laplace中心极限定理证明了二项分布（Bernoulli分布）收敛于正态分布。一个重要问题是：还有其他随机现象服从正态分布吗？大数学家Gauss在1809年出版的《天体运动理论》[9]中导出了测量误差服从正态分布，并将正态分布引用到天文学研究。因此，人们称正态分布为Gauss分布。

De Moivre和Gauss发现正态分布后，一个自然问题是：自然界还有哪些现象服从正态分布？概率论的一个巨大成果是证明了自然界不仅存在正态分布，而且正态分布占“中心”位置。这就是Chebyshev、Markov、Kolmogorov及Lyapunov等先后证明的独立同分布（IID）的随机变量序列$\xi_1, \cdots, \xi_n$的部分和服从正态分布的结论，即

定理 3 对任何独立同分布的随机变量列$\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots$，令$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$，如果其方差和均值存在，则

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{S_n - ES_n}{\sum_{k=1}^n Var(\xi_i)} \le x\Big) = \Phi(x).$$

1924年Khinchin证明了Bernoulli试验序列的重对数律，比起大数定律和中心极限定理，重对数律可以精确地描述随机变量部分和S_n 和标准差之间的关系。一般的重对数律形式如下：

定理 4 （重对数律）若$\xi_1, \cdots, \xi_n$是一列独立同分布的随机变量序列，其期望为0，方程为σ，则

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = \sigma, \ a.s.,$$

其中，log是自然对数，lim sup是上极限，"$a.s.$"是几乎必然。

概率论的大数定律、中心极限定理和重对数律三个重要定理的产生，极大地丰富了概率统计的研究内容。特别是，1933年Kolmogorov在《概率论的基本概念》[13]一书中以Lebesgue测度为理论基础，给出了概率的公理化体系，使概率论成为了一个严谨的数学分支。值得一提的是：著名经济学家Keynes从经济学中的不确定性现象提出了一系列有关概率论的概念（例如主观概率和客观概率），他的许多概率思想发表在他1921年出版的《概率论》[12] 一书中，他主张把概率作为逻辑和演绎推理来理解，概率与信念度有关，与事后结果无关。

总之，概率论的产生基于一个简单的模型－Bernoulli模型；原创了三个基本数学定理：大数定律、中心极限定理和重对数律；形成了三本巨作：Bernoulli的《猜度术》、Keynes的《概率论》和Kolmogorov的《概率论的基本概念》，造就了一批伟大的数学家和经济学家。

3 随机分析与对数学的影响

概率论与其他确定性数学学科的不同在于，概率论提出了概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$及其在概率空间上的数学期望、独立性等新概念。其中，最漂亮的结果是正态分布。正态分布有极其广泛的实际背景，实际中很多随机变量的概率分布都可以近似地用正态分布来描述，至今仍是概率论中最重要的分布。1827年，植物学家Brown将水中花粉及悬浮微小颗粒的不规则运动称为Brown运动，Brown运动的本质是动态的正态分布。1905年，Einstein给出了Brown运动的物理解释。20世纪初Wiener 引入了Wiener过程，通过数学模型描述了Brown 运动。1940年，Itô给出了关于布朗运动的随机积分定义和Itô公式，建立了随机微积分框架体系，使得微积分可以由确定性数学向随机数学方向发展。随机微积分的发展与确定性数学的交叉产生了一系列的数学分支。例如：随机分析与微分方程交叉产生了随机微分方程、随机偏微分方程和随机动力系统；随机分析与几何学的交叉产生了随机微分几何。可以说，传统的确定性数学前面加"随

机”二字就是一门新数学，例如：矩阵前面加随机二字就是随机矩阵。而在物理、化学、生命和经济加“统计”二字就是统计物理、统计化学、生物统计和经济统计。

总之，概率统计的产生加快了随机数学的快速发展和学科的交叉融合。国际上，因研究概率统计也产生了四大学派：苏联的概率学派、法国的鞅论学派、日本的随机积分学派以及美国的经济理性预期学派。

4 概率统计对经济金融的影响与局限

概率论的发展不仅推动了随机数学的产生与发展，而且带动了经济、金融等学科由定性描述向量化计算方向的发展，产生了像计量经济学和金融数学等一批新的交叉学科。概率统计在经济中的一个著名应用就是理性预期学派的产生。大家知道，经济学研究的一个重点问题是决策论，即比较两个事物的好坏。Von Neumann和Morgenstern被誉为是计量经济学的鼻祖，他们在公理化假设的基础之上，把人们利用偏好做决策问题转化为比较期望效用函数大小问题，建立了不确定条件下理性人决策行为分析的框架，开启了现代计量经济学的研究，如下论文被认为是第一篇计量经济学的论文。

定理 5 *(Von Neumann-Morgenstern，1944)* *假定ξ和η是行为，如果人们对行为的偏好$\succeq$满足六条公理（完备性公理、传递性公理、选择性公理、优势公理、连续性公理和凸性公理），那么存在唯一的概率P和效用函数U使得*

$$\xi \succeq \eta \Longleftrightarrow E_P[U(\xi)] \geq E_P[U(\eta)].$$

这个定理的伟大之处在于说明了定性的问题可以定量化，从而将传统定性描述的经济学转化为定量的数学。至此，经济学也称为经济“科学”了，从一个侧面回答了学界多年的一个公开问题：经济学是不是科学？

概率统计在金融中的成功应用引起了金融界的两次革命。

第一次金融革命是1952年Markowitz[14]提出的现代投资组合理论，该理论首次对投资组合多元化的优点进行理论化和量化计算，解决了最优的证券组合问题，颠覆了传统的选股思维，被认为是“华尔街的第一次革命”。

模型 1 *Markowitz*均值-方差模型为：

$$\min \delta^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{1 \le i \ne j \le n} w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

满足条件

$$\sum_{i=1}^{n} w_i R_i = r, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, w_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

在上述模型中，δ^2表示投资组合收益的方差，σ_i^2表示第i种风险资产的收益的方差，w_i表示第i种风险资产在投资组合中的比例，ρ_{ij}表示第i种风险资产和第j种风险资产收益的相关系数，R_i表示第i种风险资产的实际收益率，r表示投资组合的预期收益率。该模型是投资比例为变量的二次优化问题，通过求解该优化问题，可以确定最优投资比例。

第二次金融革命是Black和Scholes在1973年合作的文章[2]中提出的基于“无套利分析”模型为期权产品定价的方法，为包括股票、债券等衍生金融产品的合理定价奠定了基础，引起了“华尔街的第二次革命”。

定理 6 （*Black-Scholes*，*1973*）在完备市场中，存在唯一的风险中性测度P，使得在时刻T，未定权益ξ的价格为$E_P[\xi e^{-rT}]$，其中r是债券的利率。

总之，概率统计在经济金融的成功应用产生了四大著名理论：理性预期理论(Lucas–Sargent)、市场有效理论(Fama–Samuelson)、投资组合理论(Markowitz)以及资产定价理论，造就了Lucas、Sargent、Hansen、Scholes、Fama、Samuelson、Markowitz等一批诺贝尔经济奖获得者，引发了两次金融革命。可以说金融的两次革命使得概率统计成为金融风险计量的主要工具，它的成功应用产生了我们当今缤纷灿烂的金融世界。然而，频频爆发的金融危机使得我们也不得不沉思：概率统计作为金融风险的计量工具是否还存在不足？一场由研发新的金融风险计量工具而引发的第三次金融革命随之而来。

5 经济中的三大悖论揭示了概率论的不足

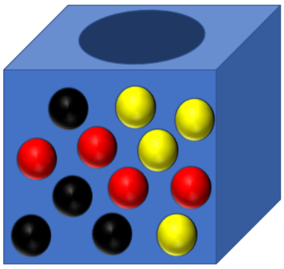
尽管概率统计在经济金融中得到了一些成功的应用，但是，一批著名的数学家和经济学家也通过实际问题发现了概率统计的不足，最具影响的是经济界的三大悖论。

第一个悖论是诺贝尔经济学奖得主Allais 在1953 年提出的Allais悖论[1]，即用数学期望作为做决策的依据未必是最好的。这个悖论动摇了理性预期的基础。

Allais 悖论							
实验 *A*				实验 *B*			
选择 1		选择 2		选择 3		选择 4	
金额	概率	金额	概率	金额	概率	金额	概率
100万元	100%	0元	1 %	0元	89 %	0元	90 %
		100万元	89 %	100万元	11 %	500万元	10 %
		500万元	10%				

图*2-Allais*悖论：按照期望效用理论，风险厌恶者应该偏向选择*1* 和选择*3*；而风险喜好者应该偏向选择*2*和选择*4*。然而实验中的大多数人偏向选择*1* 和选择*4*，这表明了人在决策时，对结果确定的现象过度重视。

第二个悖论是经济学家Ellsberg在1961年提出了Ellsberg悖论[7]，它说明了很多情形下很难找到一个概率来度量随机事件，同时人们的行为选择是受理性和心理因素共同作用的结果。Ellsberg 悖论所举出的例子得到了现代心理学的证明，认为人们的意愿更倾向于他们对不确定性程度的了解情况。



	赌局A	赌局B	赌局C	赌局D
红球	100元	0	100元	0
黑球	0	100元	0	100元
黄球	0	0	100元	100元

图3-Ellsberg悖论：一个箱子中有90个球，已知其中30个是红球，其余60个是黑球和黄球，但黑球和黄球的个数未知。现从中随机取一个，并设计4个赌局A-D。当人们在赌局A和B之间做选择时，如果选择A，则预期收益为100/3元；如果选择B，那么人们必然是认为箱子中黑球的个数大于黄球，则预期收益大于100/3元，根据期望效用理论，人们应该选择B，但实验调查结果发现多数人在A、B之间选择A而非B；同样在C、D 之间选择D而非C。

第三个悖论是诺贝尔经济学奖得主Prescott于1985年发现的“股票溢价之谜”[15]，即股票收益率远高于无风险资产（国债券）收益率。根据Prescott 的研究，此“谜”产生的主要原因是投资者存在“短视的损失规避”，也就是说，股票的波动性使得短期内出现投资损失的概率远大于债券，使得投资者越来越多地感受到损失而不愿意投

资股票。因此，股票的预期收益率需远大于债券收益率才能补偿人们对于损失的厌恶，从而提高投资股票的吸引力。

这三个悖论都体现出当做出决策时，人的主观意愿会影响判断，从而使实际效益和理性预期大相径庭。由于现实世界的复杂性，人们不可能确定一个先验分布来描述不确定事件，因此主观期望效用模型在实际决策中是有缺陷的。总之，经典的概率统计作为研究经济、金融的数学基础具有严重的不足和缺陷，其根本原因是Kolmogorov建立的公理体系是建立在概率唯一确定的基础之上，并且极限理论中的独立假设在金融中通常不再满足。

用数学的语言说：1）如果概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$中的概率测度P不是一个概率测度，而是一族概率测度，人们不知道该用哪一个，在此条件下，如何发展概率论？2）独立假设是概率论中的主要假设，如果随机变量不是独立的，如何研究概率论？3）概率论中概率测度和数学期望具有线性性。即，如果A和B不相交，则$P(A+B) = P(A) + P(B)$和对于任意的随机变量ξ和η，则$E[\xi + \eta] = E[\xi] + E[\eta]$。如果概率和期望不具有线性，如何发展概率论？

6 线性概率到非线性概率

现代金融学基于理性假设，认为理性决策者在不确定条件下的决策是利用期望效用函数得到的。随着科学和社会的发展，越来越多的不确定现象无法准确的利用线性数学概率和线性期望建模。行为金融学研究表明，决策者在不确定条件下的决策过程中并不是完全理性的，会受到个人信念的影响，出现系统性认知偏差。行为金融学以Kahneman和Tversky的展望理论[11]取代了传统金融学的均值-方差理论，是对传统金融学的挑战，但尚未成为一个公理化标准. 我国数学家徐宗本院士[20] 也提出了人工智能的10 个重大数理基础问题。因此，研究新的研究工具代替经典概率以满足经济金融市场发展的需求是金融和数学界多年来共同的梦想。此外，金融危机的产生也表明了研究新的风险度量工具和计算算法的重要性和迫切性。

为了解决统计、风险度量、数理经济学等领域中许多经典概率理论难以处理的问题，非线性概率与非线性期望应运而生，并得到了众多学者们的研究。当存在一族概率$\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$时，从主观概率和客观概率的角度分别产生了两类非常重要的非线性概率，即最大概率$\max_{\theta \in \Theta} E_{P_\theta}$和最小概率$\min_{\theta \in \Theta} E_{P_\theta}$。基于上述非线性概率，Schmeidler

提出了非线性期望预期[19, 10]并建立了完整的公理体系：

定理 7 （最大-最小预期）*如果$\succeq$满足一些公理，那么存在唯一的测度集合$\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$和效用函数$U(\cdot)$,使得下列结果成立:*

- *对于喜爱不确者(uncertainly love)，*

$$\xi \succeq \eta \Leftrightarrow \max_{\theta\in\Theta} E_{P_\theta}[U(\xi)] \geq \max_{\theta\in\Theta} E_{P_\theta}[U(\eta)],$$

- *对于厌恶不确者(uncertainly aversion)，*

$$\xi \succeq \eta \Leftrightarrow \min_{\theta\in\Theta} E_{P_\theta}[U(\xi)] \geq \min_{\theta\in\Theta} E_{P_\theta}[U(\eta)],$$

其中最大-最小数学期望为非线性期望。

上述非线性期望预期可以刻画喜爱不确者和厌恶不确者两类人，但是仍无法刻画介于喜爱不确者和厌恶不确者之间的人。陈-Epstein [3] 将Schmeidler的非线性期望预期理论发展成为动态的非线性期望预期理论. 诺奖获得者Hansen [8]称其为连续时间下的Chen and Epstin 递归最大-最小效用理论。

7 非线性期望的发展

现实世界中我们经常需要面对不确定决策问题，但在大多数情况下我们无法获得具体的概率分布，往往只能在“模糊”的情境下做出最终决策。为此，非线性概率应运而生，以期能更准确地刻画带有不确定性的实际问题。法国科学院院士Choquet将Lebesgue 积分的概念推广并应用于非可加测度，得到了一个很重要的非线性期望－Choquet期望[6]。1997年彭实戈院士通过倒向随机微分方程构造出一大类动态相容的非线性期望－g-期望[16]，相应的动态风险度量则称为g-风险度量。g-期望可以处理被一个给定概率P所控制的不确定概率集合$\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$。但是，对于奇异情形（即$P(A) = 0$ 但$P_\theta(A) > 0$），g-期望不再适用。彭实戈院士[17] 跳出概率空间框架，直接建立了非线性期望空间理论，并引入了更一般的非线性期望－G-期望。

定义 1 （次线性期望）*给定可测空间$(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathcal{H}$是定义在$(\Omega, \mathcal{F})$上由实值函数构成的线性空间。若泛函$\hat{\mathbb{E}} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$满足下列四个条件:*

(1) 单调性*:* 若$X \geq Y$*,* 则$\hat{\mathbb{E}}(X) \geq \hat{\mathbb{E}}(Y)$*.*

(2) 保常数性*:* $\hat{\mathbb{E}}(c) = c, \forall c \in \mathbb{R}$*.*

(3) 次可加性*:* $\hat{\mathbb{E}}(X+Y) \leq \hat{\mathbb{E}}(X) + \hat{\mathbb{E}}(Y), \forall X, Y \in \mathcal{H}$*,* 其中$\hat{\mathbb{E}}(X) + \hat{\mathbb{E}}(Y)$ 有意义*.*

(4) 正齐次性*:* $\hat{\mathbb{E}}(\lambda X) = \lambda \hat{\mathbb{E}}(X), \forall \lambda \geq 0$*.*

则称$\hat{\mathbb{E}}$是次线性期望。三元组$(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$称为次线性期望空间。若只满足*(1)* 和*(2)*，$\hat{\mathbb{E}}$称为非线性期望，$(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ 称为非线性期望空间。

在非线性期望框架下，从基本假设出发，同样可以给出随机变量分布、独立性、相关性、平稳性、Markov过程等概念。同时，非线性布朗运动及相应的随机分析是经典随机分析理论的实质性推广。此外，非线性期望下极限定理仍然成立，但不同于经典概率论的是：非线性大数定律的极限会落入一个区间，而非线性中心极限定理中的极限分布不再是从概率诞生至今一直占据主导地位的正态分布。彭实戈院士在[18]给出了如下形式的极限定理：

定理 8 *(Peng,2019)* 设$\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 为$(\Omega, \mathcal{H}, \hat{\mathbb{E}})$ 中的$\mathbb{R}^{2d}$- 值的独立同分布的随机变量序列。我们还假设

$$\hat{\mathbb{E}}\left[Y_1\right] = \hat{\mathbb{E}}\left[-Y_1\right] = 0, \lim_{c \to \infty} \hat{\mathbb{E}}[(|X_1| - c)^+] = 0, \lim_{c \to \infty} \hat{\mathbb{E}}\left[\left(|Y_1|^2 - c\right)^+\right] = 0.$$

记

$$\bar{S}_n := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i}{n} + \frac{Y_i}{\sqrt{n}} \right).$$

则随机向量序列$\left\{\bar{S}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 依分布收敛：

$$\lim_{n \to \infty} \hat{\mathbb{E}}\left[\varphi\left(\bar{S}_n\right)\right] = \hat{\mathbb{E}}[\varphi(\xi + \zeta)], \quad \forall \varphi \in C_{\mathrm{Lip}}\left(\mathbb{R}^d\right),$$

其中随机变量对(ξ, ζ) 为G-正态分布随机向量且相应的次线性函数$G : \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}(d) \mapsto \mathbb{R}$ 由下式给出：

$$G(p, A) := \hat{\mathbb{E}}\left[\langle p, X_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle AY_1, Y_1 \rangle\right], \quad p \in \mathbb{R}^d, \quad A \in \mathbb{S}(d).$$

De Moivre (1733) 在研究二项分布的极限分布时最早发现了正态分布的存在。后来Gauss （1801）在研究误差分布时也发现了误差服从正态分布。正态分布的发现与证明吸引了一大批数学家（例如：Laplace、Kolmogorov等）参与正态分布的普世性研究，即，自然界在什么条件下会存在着正态分布？最后，最为普世的研究结果是独立同分（IID）一定会产生正态分布，有很多反例说明：违法了独立或同分布就会产生非正态分布。当然，也有很多反例说明：违法了独立或同分布依然会产生的正态分布，例如，鞅的中心极限定理。

Kolmogorov 建立的概率公理体系是假定概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中的概率测度P 是已知的。然而，在经济市场的上，随机变量是客观存在的，但是度量不确定的概率测度P 未必是确定的。著名的Ellsberg 悖论[7]说明了随机变量是存在的，但是，人们不可能找的一个概率测度P 来度量给定的随机变量。这个例子说明了，在概率论的实际应用中，人们对概率测度会产生模糊，不知道该用那个测度才能更好的度量不确定。这就是经济界常说的“Ambiguity”，即经济市场既有市场本身的不确定，也有人们由于认识能力不足而带来的不确定。从经济市场发展的规律看Kolmogorov 建立的概率公理体系，经济学家发现：Kolmogorov 建立的概率公理体系可以量化经济市场发展的内在规律，而无法精确的刻画人们的行为对市场发展规律的外在影响。因此，研究用不同的价值观（概率测度）来刻画经济市场的规律的新学科——行为经济学，应运而生。可以说：自De Moivre (1733) 和Gauss （1801）在单一的概率测度下，发现和证明了（线性）正态分布二百多年来，研究多个概率测度（Ambiguity）下的非线性正态分布显示表达式是行为经济学学派的一个重要的热点和难点问题。陈增敬和Epstein[4]建立了一族概率测度下具有均值不确定性的中心极限定理，在随机变量序列的条件方差不变，条件均值限制在一固定区间$[\underline{\mu}, \overline{\mu}]$ 中变化的假设下，证明了其极限分布为一类方差不变型非线性正态分布，其密度函数如下：

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2+2k|z|+k^2}{2}} + k \cdot e^{-2k|z|} \cdot \Phi(-|z| + k).$$

当且仅当$k = 0$时，上述密度函数退化成经典正态分布的密度函数。

定理 9 *(Chen-Epstein,2022)* 令$(\Omega, \mathcal{G})$为一可测空间，$\mathcal{P}$为$(\Omega, \mathcal{G})$上的一族概率测度，$\{X_i\}$为其上的一列实值随机变量序列并且满足

$$ess \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q[X_i|\mathcal{G}_{i-1}] = \overline{\mu}, \ ess \inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q[X_i|\mathcal{G}_{i-1}] = \underline{\mu}, i \geq 1,$$

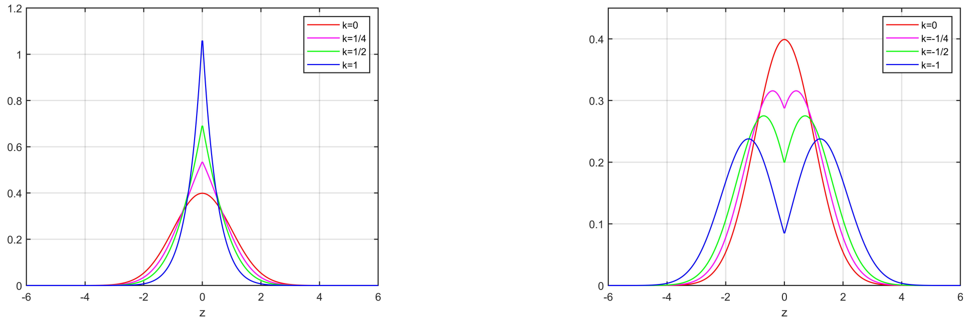


图4-[3]中非线性正态分布密度函数图像

$$E_Q[(X_i - E_Q[X_i|\mathcal{G}_{i-1})^2|\mathcal{G}_{i-1}] = \sigma^2 > 0,\ \forall Q \in \mathcal{P}, i \geq 1.$$

假设$\mathcal{P}$是矩形的且$\{X_i\}$满足$Lindeberg$条件

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|X_i|^2 I_{\{|X_i|>\sqrt{n}\varepsilon\}}] = 0,\ \forall \varepsilon > 0.$$

则对所有的$\varphi \in C([-\infty, \infty])$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{Q\in\mathcal{P}} E_Q\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma}\left(X_i - E_Q\left[X_i \mid \mathcal{G}_{i-1}\right]\right)\right)\right] = \mathbb{E}_{[\underline{\mu},\bar{\mu}]}\left[\varphi\left(B_1\right)\right],$$

等价的,

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{Q\in\mathcal{P}} E_Q\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma}\left(X_i - E_Q\left[X_i \mid \mathcal{G}_{i-1}\right]\right)\right)\right] = \mathcal{E}_{[\underline{\mu},\bar{\mu}]}\left[\varphi\left(B_1\right)\right],$$

其中$E_{[\underline{\mu},\bar{\mu}]}\left[\varphi\left(B_1\right)\right] \equiv Y_0$, (Y_t, Z_t)是如下倒向随机微分方程的解

$$Y_t = \varphi\left(B_1\right) + \int_t^1 \max_{\underline{\mu}\leq\mu\leq\bar{\mu}}\left(\mu Z_s\right) ds - \int_t^1 Z_s dB_s, 0 \leq t \leq 1,$$

$\mathcal{E}_{[\underline{\mu},\bar{\mu}]}\left[\varphi\left(B_1\right)\right] \equiv y_0$,$(y_t, z_t)$是如下倒向随机微分方程的解

$$y_t = \varphi\left(B_1\right) + \int_t^1 \min_{\underline{\mu}\leq\mu\leq\bar{\mu}}\left(\mu z_s\right) ds - \int_t^1 z_s dB_s, 0 \leq t \leq 1.$$

这里(B_t) 是定义在$(\Omega^*, \mathcal{F}^*, P^*)$上的标准布朗运动。

陈增敬及合作者[5]研究了一族概率测度下具有方差不确定性的中心极限定理，在随机变量序列的条件均值不变，条件方差限制在一区间$[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]$ 中变化的假设下，证

明了其极限分布为一类均值不变型非线性正态分布，具有如下形式的显式概率密度函数：

$$q(y)=\begin{cases} q^*(y,\alpha)\left[\dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}\right], & y\geq 0,\\ q^*(y,\beta)\left[\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}\right], & y<0,\end{cases}$$

其中$q^*(y,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2/2\right)$是正态分布$N(0,\sigma^2)$的密度函数。特别的，当$\underline{\sigma}=\overline{\sigma}$时，该非线性正态分布退化为正态分布。值得指出的是，这两种非线性正态分布在多臂机器人和量子计算的研究中也有非常重要的作用。

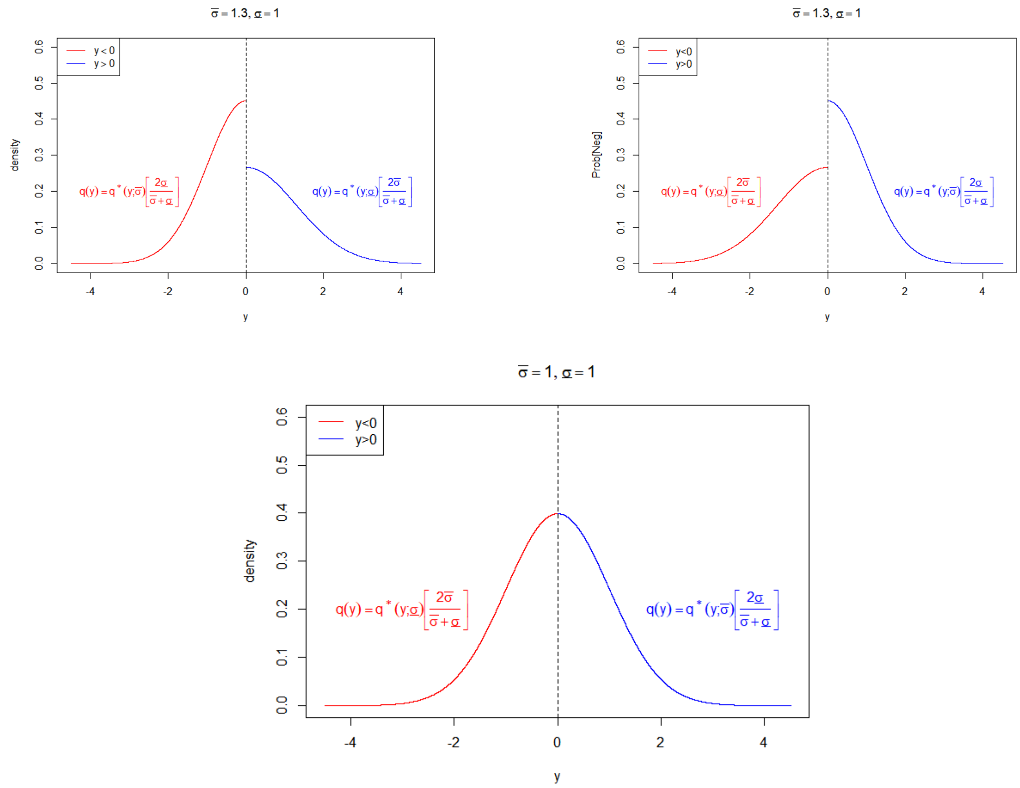


图5-[4]中非线性正态分布密度函数图像

定理 10 *(Chen-Epstein-Zhang,2023)* 令$(\Omega_i,\mathcal{G}_i)$为一族可测空间，$\mathcal{G}=\sigma(\cup_{i=1}^{\infty}G_i)$。令$X_i:\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i\to\mathbb{R}$为$\mathcal{G}_i$-可测，$\mathcal{P}$为$(\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i,\mathcal{G})$上的一族概率测度，$\mathcal{H}$为$(\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i,\mathcal{G})$上满足$\sup_{Q\in\mathcal{P}}E_Q[|X|]<\infty$的随机变量集合。假设$\mathcal{P}$中所有概率测度在$\mathcal{G}_i$上是等价的，并且满足

$$E_Q[X_i|\mathcal{G}_{i-1}]0,\ \forall Q\in\mathcal{Q}, i\geq 1.$$

定义

$$\mathcal{P}(Q,i)=\{Q'\in\mathcal{P}:Q'|_{\mathcal{G}_i}=Q|_{\mathcal{G}_i},\ Q\in\mathcal{P},$$

假设存在$\overline{var}>0$和$o<\underline{\sigma}\le\overline{\sigma}<\infty$使得对所有的$i\ge 1$和$Q\in\mathcal{P}$，

$$\overline{var}\ge ess\sup_{Q'\in\mathcal{P}(Q,i)}E_Q[X_i^2|\mathcal{G}_{i-1}],$$

$$\overline{\sigma}^2=\lim_{i\to\infty}ess\sup_{Q'\in\mathcal{P}(Q,i)}E_Q[X_i^2|\mathcal{G}_{i-1}],$$

$$\underline{\sigma}^2=\lim_{i\to\infty}ess\inf_{Q'\in\mathcal{P}(Q,i)}E_Q[X_i^2|\mathcal{G}_{i-1}].$$

进一步假设$\{X_i\}$满足$Lindeberg$条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[|X_i|^2 I_{\{|X_i|>\sqrt{n}\varepsilon\}}]=0,\ \forall\varepsilon>0.$$

令$\theta=\underline{\sigma}\sqrt{\sigma}$。对所有的$c\in\mathbb{R}$，$\varphi_1\in C_b^3(\mathbb{R}_+)$，且$\varphi_1(0)=0$，定义$\varphi$

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_1(x-c) & x\ge c,\\ -\frac{1}{\theta}\varphi_1(-\theta(x-c)) & x<c.\end{cases}$$

如果$x\ge 0$时$\varphi_1''(x)\le 0$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{Q\in\mathcal{P}}E_Q\left[\varphi\left(\frac{\Sigma_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}}\right)\right]=E_{P^*}\left[\varphi\left(W_1^c\right)\right].$$

8 结语

概率论起源于赌博和保险问题。经过300多年的发展，概率统计的方法已经被广泛应用于自然科学、经济学、医学及金融保险等科学，特别是引起了华尔街的两次金融革命。当今信息时代产生了海量数据，不确定性日益加剧，而金融危机后面临的第三次金融革命以及最近大数据科学和人工智能的发展[20]，都表明经典概率统计已不能满足现代金融发展的需求，亟需概率统计的发展和新的理论。

References

[1] M. Allais. Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine. Econometrica. 21(1953), 503-546.

[2] F. Black and M. S. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy. 81(1973), 637-654.

[3] Z. Chen and L.G. Epstein. Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time. Econometrica 70(2002), 1403-1443.

[4] Z. Chen and L. G. Epstein. A central limit theorem for sets of probability measures. Stochastic Processes and their Applications. 152(2022), 424 – 451.

[5] Z. Chen, L. G. Epstein and G. Zhang. A central limit theorem, loss aversion and multi-armed bandits. Journal of Economic Theory. 209(2023), 35pp.

[6] G. Choquet. Theory of capacities. Annales de l'Institut Fourier. 5(1954), 131-295.

[7] D. Ellsberg. Risk, Ambiguity, and the Savage axioms. Quarterly Journal of Economics. 75(1961), 643-669.

[8] L. P. Hansen and J. Miao. Asset pricing under smooth ambiguity in continuous time. Economic Theory . 74(2022),335-371.

[9] C. Gauss. Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving About the Sun in Conic Sections. 1957.

[10] I. Gilboa and D. Schmeidler. Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior. Journal of Mathematical Economics. 18(1989), 141-153.

[11] D. Kahneman and A. Tversky. Prospect theory: An analysis of decision under risk. Econometrica. 47(1979).

[12] J. Keynes. A Treatise on Probability. 1921.

[13] A. N. Kolmogorov. Foundations of the Theory of Probability. Oxford: Chelsea Publishing, 1956.

[14] H. Markowitz. Portfolio selection. The Journal of Finance. 7(1952), 77-91.

[15] R. Mehra and E. C. Prescott. The Equity Premium a Puzzle. Journal of Monetary Economics. 15(1985), 145-161.

[16] S. Peng. Backward SDE and related g-expectations. In: Backward Stochastic Differential Equations. Pitman Research Notes in Mathematics Series, No. 364. Paris: El Karoui Mazliak Edit, 1997, 141 – 159.

[17] S. Peng. Filtration consistent nonlinear expectations and evaluations of contingent claims. Acta Math Appl Sin Engl Ser. 20(2004), 1 – 24.

[18] S. Peng. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty: with robust CLT and G-Brownian motion. Springer. 2019.

[19] D. Schmeidler. Subjective Probability and Expected Utility without Additivity. Econometrica. 57(1989), 571-587.

[20] 徐宗本. 人工智能的10 个重大数理基础问题. *Sci Sin Inform.* 51（2021）, 1967 – 1978.